Sur la structure de graphe d'une borne stochastique

Ana Bušić

INRIA Grenoble - Rhône-Alpes

AEP 9, Aussois, juin 2008

Plan

Motivation

Modèles markoviens

- Simplicité de modélisation des systèmes complexes : décrire les états et les transitions
- Différents formalismes de haut niveau (Petri nets, Stochastic Automata Networks, ...) $\rightarrow$ modélisation et stockage encore plus simples : décrire différentes composantes et leurs interactions
- Problème : l'explosion de l'espace d'états - difficile/impossible à analyser

Motivation

Modèles markoviens

- Simplicité de modélisation des systèmes complexes : décrire les états et les transitions
- Différents formalismes de haut niveau (Petri nets, Stochastic Automata Networks, ...) $\rightarrow$ modélisation et stockage encore plus simples : décrire différentes composantes et leurs interactions
- Problème : l'explosion de l'espace d'états - difficile/impossible à analyser

Objectif : trouver une autre chaîne de Markov qui donne des bornes pour la chaîne initiale et qui est plus facile à analyser

Ordres stochastiques

Definition (Ordre stochastique)

Un ordre stochastique est un ordre partiel sur un espace des fonctions de répartition.

Ordres stochastiques

Definition (Ordre stochastique)

Un ordre stochastique est un ordre partiel sur un espace des fonctions de répartition.

Definition (Ordre stochastique intégral)

Un ordre stochastique $\preceq$ est dit intégral si il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que :

$$X \preceq Y \iff E[f(X)] \leq E[f(Y)],\ \forall f \in \mathcal{F},$$

quand les espérances existent.

Notation : $\preceq_{\mathcal{F}}$ (ordre intégral généré par la famille $\mathcal{F}$)

Ordres stochastiques

Definition (Ordre stochastique)

Un ordre stochastique est un ordre partiel sur un espace des fonctions de répartition.

Definition (Ordre stochastique intégral)

Un ordre stochastique $\preceq$ est dit intégral si il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que :

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow E[f(X)] \leq E[f(Y)], \; \forall f \in \mathcal{F},$$

quand les espérances existent.

Notation : $\preceq_{\mathcal{F}}$ (ordre intégral généré par la famille $\mathcal{F}$)

Exemples :

- $\preceq_{st}$ - généré par les fonctions croissantes ($\mathcal{F}_{st}$)
- $\preceq_{icx}$ - généré par les fonctions croissantes convexes ($\mathcal{F}_{icx}$)

$\preceq_{st}$ sur un espace fini totalement ordonné

- Caractérisation sur $S = \{1, 2, \ldots, n\}$:
  (x et y deux vecteurs de probabilité)

$$x \preceq_{st} y \iff \sum_{k \geq i}^{n} x_k \leq \sum_{k \geq i}^{n} y_k, \;\; i = 2, \ldots, n$$

- Exemple :
  $x = (0.5, 0.4, 0.1),\; y = (0.3, 0.5, 0.2),\; z = (0.4, 0.1, 0.5)$
  1) $x \preceq_{st} y$:

$$\begin{aligned} x_3 = 0.1 &\quad \leq \quad 0.2 = y_3 \\ x_2 + x_3 = 0.5 &\quad \leq \quad 0.7 = y_2 + y_3 \end{aligned}$$

  2) $x \preceq_{st} z$
  3) mais, $y \not\preceq_{st} z$ et $z \not\preceq_{st} y$

Comparaison des chaînes de Markov

Definition (Comparaison de DTMC)

$\{X_n\}_{n\geq 0}$, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ deux DTMC sur $(S, \preceq_S)$:

$$\{X_n\}_{n\geq 0} \preceq_{\mathcal{F}} \{Y_n\}_{n\geq 0} \ \text{ si } \ X_n \preceq_{\mathcal{F}} Y_n,\ \forall n \geq 0$$

Comparaison de matrices de trans. : $P \preceq_{\mathcal{F}} Q$ si $P_{i,*} \preceq_{\mathcal{F}} Q_{i,*}$, $\forall i$.

Monotonie : P est $\preceq_{\mathcal{F}}$-monotone si pour tout x, y vect. de probabilité : $x \preceq_{\mathcal{F}} y \ \Rightarrow \ x\, P \preceq_{\mathcal{F}} y\, P$.

Theorem (Conditions suffisantes)

$\{X_n\}_{n\geq 0}$, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ DTMC avec matrices de transition P, Q. Si :

- $X_0 \preceq_{\mathcal{F}} Y_0$,
- *$\exists$ matrice de transition R telle que R est $\preceq_{\mathcal{F}}$-monotone R et $P \preceq_{\mathcal{F}} R \preceq_{\mathcal{F}} Q$,*

alors $\{X_n\} \preceq_{\mathcal{F}} \{Y_n\}$.

Caractérisation algébrique de la monotonie

L'espace fini, totalement ordonné $S = \{1, 2, \ldots, n\}$:

[Rappel : $x \preceq_{st} y \iff \sum_{k\geq i}^{n} x_k \leq \sum_{k\geq i}^{n} y_k,\ i = 2, \ldots, n$]

$$K_{st} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Comparaison :

Vecteurs :

$x \preceq_{st} y \Leftrightarrow x\ K_{st} \leq y\ K_{st}$

Matrices :

$P \preceq_{st} Q \Leftrightarrow P\ K_{st} \leq Q\ K_{st}$

Monotonie :

P est $\preceq_{st}$-monotone

$\Leftrightarrow\ P_{i-1,*} \preceq_{st} P_{i,*},\ i > 1$

$\Leftrightarrow$ les colonnes de la matrice $P\ K_{st}$ sont croissantes ($\Leftrightarrow K_{st}^{-1} P K_{st} \geq 0$)

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$PK_{st} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0.4 \\ 1 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Construction d'une borne monotone

Algorithme de Vincent [AAV98] :

Entrée : matrice stochastique P

Sortie : matrice stochastique Q telle que :

- $P \preceq_{st} Q$ $(\sum_{k=j}^{n} Q_{i,k} \geq \sum_{k=j}^{n} P_{i,k}, \ \forall \ i)$
- Q est $\preceq_{st}$-monotone
  $(\sum_{k=j}^{n} Q_{i,k} \geq \sum_{k=j}^{n} Q_{i-1,k}, \ \forall \ i \geq 2, \ \forall \ j)$

for $i = 1$ **to** n **do**
    for $j = n$ **to** 1 **do**
        $Q_{i,j} = \max(\sum_{k=j}^{n} P_{i,k}, \sum_{j=k}^{n} Q_{i-1,k}) - \sum_{j=k+1}^{n} Q_{i,k};$
    end
end

Propriétés :

- Optimalité : $Q \preceq_{st} U$, pour toute matrice $\preceq_{st}$-monotone U telle que $P \preceq_{st} U$.
- Inconvénient : Pas de garanties sur le graphe sous-jacent (le nombre et l'emplacement d'éléments non-nuls)
  Exemples :

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.0 & 0.1 \\ 0.8 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.0 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Les bornes avec une structure particulière

- Objectif : Les bornes avec une structure adaptée à une méthode de résolution numérique
- Idée : isoler des contraintes structurelles élémentaires compatibles avec la comparaison et la monotonie

  Supprimer la transition (i, j) : en déplaçant la masse de probabilité de l'élément $Q_{i,j}$ vers la droite (vers les éléments $Q_{i,k},\ k > j$)

  Créer la transition (i, j) : en déplaçant un peu de la masse de probabilité restante de gauche (des éléments $Q_{i,k},\ k < j$) vers l'élément $Q_{i,j}$ (ssi $\sum_{k=j+1}^{n} Q_{i,k} < 1$) :

$$Q_{i,j} = \epsilon \times (1 - \sum_{k=j+1}^{n} Q_{i,k}), \text{ où } 0 < \epsilon < 1.$$

Formalisme de patterns

Pattern $=$ une matrice dont les éléments sont des symboles, précisant les contraintes sur le graphe de la matrice borne [BF05]

Symboles et leurs contraintes associées :

- Indépendants de la matrice initiale :
  - 0 - pas de transition
  - 1 - transition obligatoire
  - $\star$ - pas de contrainte
- Dépendant de la matrice initiale :
  - s - préservation de transitions

Alg. de Vincent :

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Irréductibilité (IMSUB [FP02]) :

$$\begin{pmatrix} \star & s & s & s \\ 1 & \star & s & s \\ \star & 1 & \star & s \\ \star & \star & 1 & \star \end{pmatrix}$$

Single Input Macro State :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} \star & \star & 0 & 0 & \star & 0 & \star \\ \star & \star & 0 & 0 & \star & 0 & \star \\ \hline 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & 0 & \star \\ \hline 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & \star \end{array}\right)$$

- Def. Pattern T est compatible avec P si il existe une borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone Q conforme à T

- Def. Pattern T est compatible avec P si il existe une borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone Q conforme à T
- Exemple : T n'est pas compatible avec P ($P_{1,4} = 0.1$ et $T_{1,4} = 0$)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Def. Pattern T est compatible avec P si il existe une borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone Q conforme à T
- Exemple : T n'est pas compatible avec P ($P_{1,4} = 0.1$ et $T_{1,4} = 0$)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Conditions nécessaires et suffisantes ? (pour $\{0, 1, \star\}$)

- Def. Pattern T est compatible avec P si il existe une borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone Q conforme à T
- Exemple : T n'est pas compatible avec P ($P_{1,4} = 0.1$ et $T_{1,4} = 0$)

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Conditions nécessaires et suffisantes ? (pour $\{0, 1, \star\}$)
- Matrice P :

$$l_i^P = \min\{k \mid P_{i,k} > 0\}, \quad u_i^P = \max\{k \mid P_{i,k} > 0\}.$$

Pattern T :

$$l_i^T = \min\{k \ : \ T_{i,k} \neq 0\}, \qquad u_i^T = \max\{k \ : \ T_{i,k} \neq 0\},$$

$$L_i^T = \begin{cases} n, \ T_{i,k} \neq 1, \forall k \\ \min\{k \ : \ T_{i,k} = 1\}, \text{ sinon} \end{cases}, \qquad U_i^T = \begin{cases} 1, \ T_{i,k} \neq 1, \forall k \\ \max\{k \ : \ T_{i,k} = 1\}, \text{ sinon} \end{cases}$$

- Conditions nécessaires :

- Conditions nécessaires :
  - Il existe une matrice Q conforme à T telle que $P \preceq_{st} Q$ ssi :

$$l_i^P \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^P \leq u_i^T, \; \forall i.$$

- Conditions nécessaires :
  - Il existe une matrice Q conforme à T telle que $P \preceq_{st} Q$ ssi :

$$l_i^P \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^P \leq u_i^T,\ \forall i.$$

  - Il existe une matrice $\preceq_{st}$-monotone conforme à T ssi :

$$L_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} l_k^T \quad \text{et} \quad u_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} U_k^T,\ 1 \leq i < n.$$

- Conditions nécessaires :
  - Il existe une matrice Q conforme à T telle que $P \preceq_{st} Q$ ssi :

$$l_i^P \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^P \leq u_i^T, \; \forall i.$$

  - Il existe une matrice $\preceq_{st}$-monotone conforme à T ssi :

$$L_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} l_k^T \quad \text{et} \quad u_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} U_k^T, \; 1 \leq i < n.$$

- Conditions suffisantes ?

- Conditions nécessaires :
  - Il existe une matrice Q conforme à T telle que $P \preceq_{st} Q$ ssi :

$$l_i^P \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^P \leq u_i^T, \ \forall i.$$

  - Il existe une matrice $\preceq_{st}$-monotone conforme à T ssi :

$$L_{i+1}^T \geq \max_{1\leq k\leq i} l_k^T \quad \text{et} \quad u_{i+1}^T \geq \max_{1\leq k\leq i} U_k^T, \ 1 \leq i < n.$$

- Conditions suffisantes ? non
  Exemple : P est conforme à T, R est $\preceq_{st}$-monotone et conforme à T, mais T n'est pas compatible avec P

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ 1 & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Thm. Pattern T est compatible avec P ssi :

- Il existe une matrice Q conforme à T telle que $v(P) \preceq_{st} Q$ ($v(P)$ - borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone obtenue par l'algorithme de Vincent) :

$$l_i^{v(P)} \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^{v(P)} \leq u_i^T, \; \forall i.$$

et $l_i^{v(P)} = \max_{k \leq i} l_k^P, \; u_i^{v(P)} = \max_{k \leq i} u_k^P, \; \forall i.$

- Il existe une matrice $\preceq_{st}$-monotone conforme à T ssi :

$$L_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} l_k^T \quad \text{et} \quad u_{i+1}^T \geq \max_{1 \leq k \leq i} U_k^T, \; 1 \leq i < n.$$

Algorithme

- Entrée : matrice stochastique P et pattern T
- Sortie : une matrice Q $\preceq_{st}$-monotone, conforme à T et telle que $P \preceq_{st} Q$

for $i = 1$ **to** n **do**

  $last = -1$ (élément où on peut mettre la masse de proba) ;

  for $j = n$ **downto** 1 **do**

    Contraintes de comparaison :

    $sum = \sum_{k=j}^{n} P_{i,k}$;

    Contraintes de monotonie :

    if $i > 1$ **then** $sum = \max(sum, \sum_{j=k}^{n} Q_{i-1,k})$;

    Calcul de candidat pour l'élément courant :

    if $j < n$ **then** $Q_{i,j} = \max(0, sum - \sum_{j=k+1}^{n} Q_{i,k})$;

    else $Q_{i,j} = sum$;

    Vérification des contraintes de pattern :

    switch $T_{i,j}$ **do**

      modification de la ligne $Q_{i,*}$ en fonction de $T_{i,j}$;

      mise à jour éventuelle de la valeur *last*;

    end

  end

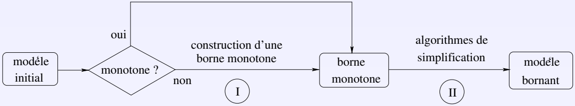
end

```
case ⋆
    last = j;
case 0
    if Q_{i,j} > 0 then
        if last > 0 then
            Q_{i,last} = Q_{i,last} + Q_{i,j};
            Q_{i,j} = 0;
        else STOP : non-compatible !;
    end
case 1, s
    last = j;
    if Q_{i,j} = 0 then
        if T_{i,j} = 1 or (T_{i,j} = s and P_{i,j} > 0) then
            if ∑_{k=j+1}^{n} Q_{i,k} < 1 then  Q_{i,j} = ϵ × (1 − ∑_{k=j+1}^{n} Q_{i,k});
            else STOP : non-compatible !;
        end
    end
```

Propriétés

- Borne ssi T compatible avec P
- Optimalité pour les patterns avec $\{0, \star\}$
- Un seul algorithme et une seule preuve
- Pour considérer une nouvelle structure de la borne il suffit de décrire son pattern

Construction de bornes en 2 étapes



- Deux étapes :
  - Construction d'une borne monotone : $R = v(P)$
  - Construction d'une borne Q ($R \preceq_{st} Q$) conforme à T. Ssi

$$l_i^R \leq L_i^T \quad \text{et} \quad u_i^R \leq u_i^T,\ \forall i.$$

- Pour $\{0, \star\}$ la borne en 2 étapes est toujours meilleure (que la borne monotone).
- Patterns non-monotones !
- Attention : que pour les patterns $\{0, 1, \star\}$ (s depend de la matrice initiale)

Conclusions

- Bornes ayant une structure de graphe pour laquelle il existe un algorithme numérique adapté
- Description très simple des contraintes sur le graphe de la matrice borne
  (nouvelle structure - il suffit de décrire son pattern)
- La version plus longue de ce travail [Bus07, Section 4.1]
- Travaux connexes : de bornes ayant la forme close [BBP07], ou qui permettent de réduire l'espace d'états en calculant une borne agrégeable [Tru00, FP02]

O. Abu-Amsha and J.-M. Vincent.
An algorithm to bound functionals of Markov chains with large state space.
In *4th INFORMS Conference on Telecommunications, Boca Raton, FL*, 1998.

M. Ben Mamoun, A. Busic, and N. Pekergin.
Generalized class C Markov chains and computation of closed-form bounding distributions.
Probability in the Engineering and Informational Sciences, 21(2) :235–260, 2007.

A. Busic and J.-M. Fourneau.
A matrix pattern compliant strong stochastic bound.
In *SAINT-W 2005 Proceedings*, pages 256–259, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.

A. Busic.
Comparaison stochastique de modèles markoviens : une approche algorithmique et ses applications en fiabilité et en évaluation de performance.
PhD thesis, Université de Versailles, 2007.
http://www.prism.uvsq.fr/~abusic/PhDthesis/busic_these.pdf.

J.-M. Fourneau and N. Pekergin.
An algorithmic approach to stochastic bounds.
In *Performance Evaluation of Complex Systems : Techniques and Tools, Performance 2002, Tutorial Lectures*, pages 64–88. Springer-Verlag, 2002.

L. Truffet.
Reduction technique for discrete time Markov chains on totally ordered state space using stochastic comparisons.
Journal of Applied Probability, 37(3) :795–806, 2000.