Sur la structure de graphe d'une borne stochastique

Ana Bušić

INRIA Grenoble - Rhône-Alpes et LIG
51, avenue Jean Kuntzman
38330 Montbonnot, France
Ana.Busic@imag.fr

1. Introduction

Grâce aux divers formalismes modulaires développés au cours des années passées, par exemple les réseaux de Pétri ou les réseaux d'automates stochastiques, il est maintenant possible de construire des chaînes de Markov décrivant des systèmes très complexes. Par contre, les modèles obtenus ont souvent un espace d'états trop grand, ce qui exclut des méthodes classiques de résolution.

Cependant, les résultats exacts comptent souvent moins que la preuve que les performances d'un système atteignent un objectif. La comparaison stochastique [5] permet de construire des modèles plus simples, qu'on peut résoudre en utilisant des méthodes classiques, et qui fournissent des bornes des distributions stationnaires ou transitoires. Plusieurs algorithmes ont été développés, permettant de construire automatiquement des modèles simples dont l'analyse exacte donne des bornes pour le modèle original [4]. Ces algorithmes reposent sur la comparaison des variables aléatoires et sur la propriété de monotonie des chaînes de Markov.

Dans [3], un formalisme de pattern matriciel a été proposé, regroupant les différents algorithmes qui forcent une structure particulière de la chaîne. Un algorithme y a été donné qui pour une matrice de transition arbitraire construit une borne supérieure monotone (au sens de l'ordre stochastique fort), ayant une structure donnée. Nous donnons ici des conditions suffisantes et nécessaires pour l'existence d'une telle borne. Nous proposons également des améliorations de l'algorithme proposé dans [3].

2. Bornes stochastiques

Supposons que nous avons une chaîne de Markov avec une matrice de transition P que nous n'arrivons pas à analyser directement de manière efficace. Alors, l'approche proposée dans [1, 4] consiste à construire une chaîne bornante au sens de l'ordre stochastique fort ($\preceq_{st}$). Cet ordre permet de comparer les récompenses croissantes (stationnaires et transitoires). Afin d'obtenir des bornes supérieures (les bornes inférieures sont obtenues de manière similaire), d'après le théorème classique de la comparaison des chaînes de Markov [5, théorème 5.2.11], il suffit de trouver une matrice $\preceq_{st}$-monotone Q telle que $P \preceq_{st} Q$. Dans le cas de l'espace d'états fini et totalement ordonné $\{1, \ldots, n\}$, ces conditions s'expriment en fonction des sommes partielles à droite des lignes des matrices P et Q :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{k=j}^{n} Q_{1,k} \geq \sum_{k=j}^{n} P_{1,k}, \ \forall j, \\ &\textstyle\sum_{k=j}^{n} Q_{i,k} \geq \max\left\{\sum_{k=j}^{n} Q_{i-1,k}, \sum_{k=j}^{n} P_{i,k}\right\}, \\ &\qquad\qquad \forall i \geq 2, \forall j. \end{aligned} \tag{1}$$

En prenant les égalités, nous obtenons la borne supérieure optimale au sens $\preceq_{st}$ [1]. Cependant, nous n'avons aucune garantie sur les propriétés structurelles de la borne. D'autre part, en déplaçant un peu de masse de probabilité vers les états plus grands (à l'intérieur d'une ligne), nous pouvons imposer des contraintes structurelles sur le graphe de la matrice borne.

3. Patterns matriciels

Nous allons appeler un *alphabet* $\mathcal{A}$ un ensemble de symboles avec des règles associées à chaque symbole. Un *pattern* T est alors une matrice dont les éléments sont des symboles de l'alphabet $\mathcal{A}$. Nous allons considérer l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, \star\}$ avec la sémantique suivante (d'autres symboles peuvent être trouvés dans [2, section 4.1]) :

- $T_{i,j} = 0 \Rightarrow Q_{i,j} = 0$;
- $T_{i,j} = 1 \Rightarrow Q_{i,j} > 0$;
- $T_{i,j} = \star$ signifie qu'il n'y a pas de contraintes structurelles sur $Q_{i,j}$.

Nous allons dire qu'une matrice Q est *conforme* au pattern T si elle vérifie les règles associées à chacun des éléments du pattern T. Pour un couple (P, T) d'une matrice stochastique initiale P et un pattern T il n'est pas toujours possible de construire une matrice stochastique Q telle que :

- Q est $\preceq_{st}$-monotone,
- $P \preceq_{st} Q$,
- Q est conforme au pattern T.

Nous allons dire qu'un pattern T est *réalisable* par rapport à une matrice stochastique P s'il existe une matrice stochastique Q conforme au pattern T telle que $P \preceq_{st} Q$. Notons par :
$l_i^P = \min\{k : P_{i,k} > 0\}$, $u_i^P = \max\{k : P_{i,k} > 0\}$,
$l_i^T = \min\{k : T_{i,k} \neq 0\}$, $u_i^T = \max\{k : T_{i,k} \neq 0\}$,

$$L_i^T = \begin{cases} n, & T_{i,k} \neq 1, \forall k \\ \min\{k \,:\, T_{i,k} = 1\}, & \text{sinon} \end{cases},$$
$$U_i^T = \begin{cases} 1, & T_{i,k} \neq 1, \forall k \\ \max\{k \,:\, T_{i,k} = 1\}, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition 1. *Un pattern* T *est réalisable par rapport à une matrice stochastique* P *si et seulement si*

$$l_i^P \leq L_i^T \quad \textit{et} \quad u_i^P \leq u_i^T, \ \forall i.$$

Nous allons dire qu'un pattern T est $\preceq_{st}$*-monotone* s'il existe une matrice stochastique Q qui est $\preceq_{st}$-monotone et conforme au pattern T.

Proposition 2. *Un pattern* T *est* $\preceq_{st}$*-monotone si et seulement si*

$$L_{i+1}^T \geq \max_{1\leq k\leq i} l_k^T \quad \textit{et} \quad u_{i+1}^T \geq \max_{1\leq k\leq i} U_k^T, \ 1 \leq i < n.$$

La $\preceq_{st}$-monotonie et la réalisabilité du pattern T par rapport à P sont clairement des contraintes nécessaires. Cependant, elle ne sont pas suffisantes.

Notons par $\nu(P)$ la plus petite borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone de la matrice P (obtenue en prenant les égalités dans (1)). Alors,

$$l_i^{\nu(P)} = \max_{k\leq i} l_k^P, \ u_i^{\nu(P)} = \max_{k\leq i} u_k^P, \ \forall i.$$

Théorème 1. *Soit* P *une matrice stochastique et* T *un pattern avec l'alphabet* $\{0, 1, \star\}$*. Il existe une matrice* Q *telle que :*
– Q *est* $\preceq_{st}$*-monotone,*
– $P \preceq_{st} Q$*,*
– Q *est conforme au pattern* T*,*
si et seulement si le pattern T *est* $\preceq_{st}$*-monotone et réalisable par rapport à la matrice* $\nu(P)$*.*

Il est possible de montrer que pour un pattern T $\preceq_{st}$-monotone et réalisable par rapport à la matrice $\nu(P)$ l'algorithme proposé dans [3] construit toujours une matrice Q vérifiant les contraintes du théorème. De plus, si le pattern T ne contient que des 0 et des $\star$, alors la matrice borne donné par cet algorithme est optimale (i.e. la plus petite matrice borne supérieure à P qui est $\preceq_{st}$-monotone et conforme au pattern T). (Dans le cas d'un pattern contenant le symbole 1, il n'existe pas de borne optimale.) L'algorithme, ainsi que les preuves des résultats de cette section peuvent être trouvées dans [2, section 4.1].

4. Calcul des bornes en deux étapes

La monotonie de la matrice Q n'est pas une condition nécessaire pour la comparaison des chaînes : il est suffisant de trouver une matrice R qui est $\preceq_{st}$-monotone et qui vérifie $P \preceq_{st} R \preceq_{st} Q$ (voir [5, théorème 5.2.11]). Pour une matrice initiale P qui est $\preceq_{st}$-monotone, nous n'avons donc pas besoin d'imposer la monotonie de la borne. Dans le cas d'une matrice initiale P qui n'est pas $\preceq_{st}$-monotone, nous pouvons construire des bornes en deux étapes :

1. Trouver une matrice R $\preceq_{st}$-monotone, telle que $P \preceq_{st} R$.
2. Trouver une matrice Q conforme au pattern T, telle que $R \preceq_{st} Q$ (pas forcement monotone).

Les bornes obtenues en deux étapes sont en général plus précises que celles obtenues par l'algorithme proposé dans [3]. Dans le cas d'un pattern T qui ne contient que les symboles 0 et $\star$, et une matrice P arbitraire, la borne obtenue en deux étapes est toujours plus petite au sens de l'ordre $\preceq_{st}$ que la borne supérieure $\preceq_{st}$-monotone optimale conforme au pattern T. De plus, la construction des bornes en deux étapes permet d'utiliser aussi des patterns non-monotones.

5. Conclusions et travaux connexes

Le formalisme de patterns permet de décrire différents types de bornes ayant une structure de graphe pour laquelle il existe un algorithme numérique adapté. Cependant, il ne permet pas de décrire les contraintes sur les valeurs des transitions (juste leur existence). Il existe d'autres algorithmes qui construisent de bornes ayant la forme close, ou qui permettent de réduire l'espace d'états en calculant une borne agrégeable [4].

Bibliographie

1. O. Abu-Amsha and J.-M. Vincent. An algorithm to bound functionals of Markov chains with large state space. In *4th INFORMS Conference on Telecommunications*, 1998.
2. A. Busic. *Comparaison stochastique de modèles markoviens : une approche algorithmique et ses applications en fiabilité et en évaluation de performance*. PhD thesis, UVSQ, 2007. `http://www.prism.uvsq.fr/~abusic/PhDthesis/busic_these.pdf`.
3. A. Busic and J.-M. Fourneau. A matrix pattern compliant strong stochastic bound. In *SAINT-W 2005 Proceedings*, pages 256–259. IEEE Computer Society, 2005.
4. J.-M. Fourneau and N. Pekergin. An algorithmic approach to stochastic bounds. volume 2459 of *LNCS*, pages 64–88. Springer, 2002.
5. A. Muller and D. Stoyan. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, New York, NY, 2002.