Efficacité de méthodes de détection du régime stationnaire pour l'analyse de la disponibilité ponctuelle des grands modèles

Leonardo Brenner, Brigitte Plateau

Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Projet Mescal
51, avenue Jean Kuntzman
38330 Montbonnot
{Leonardo.Brenner, Brigitte.Plateau}@imag.fr

1. Introduction

Les Chaînes de Markov sont largement utilisées pour l'évaluation de performance, fiabilité et disponibilité de systèmes et réseaux. L'utilisation de formalismes de haut niveau comme les *Réseaux de Petri Stochastiques - RPS*, *Algèbre de Processus Stochastiques - APS* et *Réseaux d'Automates Stochastiques - RAS*, permettent une définition et une génération de grands modèles de façon simple et efficace par rapport aux temps et à l'espace mémoire requis, mais, la solution de la chaîne et l'obtention des indices de performances sont encore limités, surtout sur l'analyse transitoire.

Nos travaux s'intéressent à l'efficacité des méthodes de détection du régime stationnaire dans le calcul de la disponibilité ponctuelle lorsqu'ils sont appliqués sur des grands modèles. Pour tester l'efficacité de ces méthodes, on utilise le formalisme RAS pour la description de grands modèles et on propose une modification de l'algorithme de multiplication à gauche pour la multiplication à droite.

2. Disponibilité ponctuelle

On peut définir la disponibilité ponctuelle comme l'espérance de la récompense avec la distribution transitoire à l'instant t :

$$PAV(t) = \sum_i r(i)\pi_t[i] \tag{1}$$

où $r(i)$ est la fonction de récompense pour l'état i et $\pi_t[i]$ est la probabilité du i-ème élément du vecteur de probabilité de la distribution transitoire à l'instant t.

La distribution transitoire à l'instant t (π_t) est souvent calculé par la *méthode d'uniformisation*. Cela nous permet de réécrire l'équation 1 par :

$$PAV(t) = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} P^k \mathbb{1}_U \tag{2}$$

où $\mathbb{1}_U$ est le vecteur de la fonction indicatrice de l'ensemble d'états UP. La fonction indicatrice de l'ensemble d'états UP est une particularisation de la fonction $r(i)$ vaut 1 lorsque l'état i appartient à l'ensemble UP et 0 lorsque il appartient à l'ensemble $DOWN$. L'ensemble d'états UP est défini comme l'ensemble d'états où le système est en état de marche et l'ensemble d'états $DOWN$ est défini comme l'ensemble d'états où le système est en panne.

Cependant, cette méthode peut amener à un grand nombre de multiplications vecteur-matrice, car le nombre d'itérations nécessaires dépend de la valeur de t. Lorsque le temps augmente, on peut s'attendre à ce que la distribution transitoire s'approche de l'état stationnaire.

Cette idée a été explorée par Sericola [5] et Ciardo et al. [1] pour réduire le coût de calcul en arrêtant le nombre de multiplications vecteur-matrice lorsqu'on arrive à l'état stationnaire.

2.1. Méthode de détection du régime stationnaire

Soit N le nombre de multiplications vecteur-matrice nécessaires pour atteindre le régime stationnaire et $K_\varepsilon(t)$ le nombre de multiplications nécessaires pour calculer la distribution transitoire à l'instant t obtenue par la méthode de troncation de Fox-Glynn [3]. Si N est plus petit que K_ε on peut économiser du temps de calcul en arrêtant les itérations à N itérations. Alors, on utilise le vecteur de la distribution stationnaire (obtenu à la N-ème itération) à la place des vecteurs qui suivent la N-ème itération pour calculer la distribution transitoire à l'instant t.

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour détecter le régime stationnaire. On s'intéresse à 2 méthodes de détection du régime stationnaire basées sur la multiplication à droite ($P^n \mathbb{1}_U$).

2.1.1. Convergence du vecteur

La première méthode de détection du régime stationnaire a été proposée par Ciardo *et al.* dans [1]. Cette méthode consiste à détecter le régime stationnaire par la convergence du vecteur. La convergence du vecteur est détectée par la comparaison de chaque élément de deux vecteurs. Lorsque la différence entre les deux vecteurs est plus petite que l'erreur maximum acceptée, le régime stationnaire est détecté. Différentes normes peuvent être utilisées dans la comparaison des vecteurs.

2.1.2. Contrôle de la suite des vecteurs w_n

La deuxième méthode a été proposée par Sericola dans [5]. Cette méthode utilise un contrôle de la suite des vecteurs w_n. Le vecteur w_n est obtenu par $w_n = P^n \mathbb{1}_U$. Cette méthode utilise la plus grande et la plus petite valeur de w_n pour détecter le régime stationnaire.

3. Formalisme RAS

Les *Réseaux d'Automates Stochastiques - RAS* sont un formalisme Markovien structuré qui décrit un système complet par une collection de sous-systèmes [4]. Les sous-systèmes ont un comportement indépendant (*événements locaux*) et peuvent éventuellement interagir entre eux (*taux fonctionnels* et *événements synchronisant*). Chaque sous-système est décrit par un automate stochastique.

RAS ont une représentation tensorielle qui permet de représenter le modèle de façon efficace et qui permet de construire le processus stochastique lié au modèle [6].

Fernandes *et al* [2] ont défini des algorithmes pour calculer la solution stationnaire et transitoire sans générer la chaîne de Markov équivalente. Cependant, ces algorithmes ont été défini pour une multiplication à gauche (vQ). On a proposé une adaptation de l'algorithme original pour rendre possible la multiplication à droite (Qw). La multiplication à droite est essentielle à la méthode de détection du régime stationnaire par contrôle de la suite de w_n.

4. Comparaison des méthodes

Notre objectif est de comparer des méthodes de détection du régime stationnaire sur de grands modèles de façon à pouvoir vérifier l'efficacité des algorithmes.

On a appliqué les algorithmes de calcul de la disponibilité ponctuelle et de détection du régime stationnaire sur 6 modèles de systèmes sujets aux défaillances. Les différentes caractéristiques de chaque modèle permettent une analyse plus complète des méthodes de détection du régime stationnaire car différents scénarios sont étudiés.

De façon à prendre en compte les différentes caractéristiques et scénarios, on va analyser l'efficacité des méthodes de détection du régime stationnaire sur de grands modèles et différents critères, tel que la taille des modèles, l'ensemble d'états UP et l'erreur maximum acceptée.

5. Conclusions

Parmi les méthodes analysées, la méthode de convergence relative du vecteur w_n (norme infinie relative) a les meilleurs résultats par rapport au nombre d'itérations nécessaires à la détection du régime stationnaire. On remarque aussi que la méthode de contrôle de la suite du vecteur w_n a une meilleure performance que la méthode de convergence absolue de vecteur w_n (norme L1) sur les grands modèles.

Concernant la précision de résultats, on remarque que fréquemment la méthode de convergence relative du vecteur w_n fait une détection prématurée du régime stationnaire. Cette détection prématurée entraîne une erreur résiduelle assez importante au niveau de la valeur de la disponibilité ponctuelle, surtout lorsque la méthode est utilisée sur de grands modèles.

Il est clair que pour les grands modèles les méthodes de contrôle de la suite de w_n et de convergence absolue du vecteur w_n sont les plus recommandées.

Bibliographie

1. G. Ciardo, A. Blakemore, P.F.J. Chimento, J.K. Muppala, and K.S. Trivedi. *Linear Algebra, Markov Chains, and Queueing Models*, chapter Automated Generation and Analysis of Markov Reward Models Using Stochastic Reward Nets, pages 145–191. Springer-Verlag, 1993.
2. P. Fernandes, B. Plateau, and W. J. Stewart. Efficient descriptor - Vector multiplication in Stochastic Automata Networks. *Journal of the ACM*, 45(3) :381–414, 1998.
3. B. L. Fox and Peter W. Glynn. Computing poisson probabilities. *Commun. ACM*, 31(4) :440–445, 1988.
4. B. Plateau. On the stochastic structure of parallelism and synchronization models for distributed algorithms. In *Proceedings of the 1985 ACM SIGMETRICS*, pages 147–154, Austin, Texas, USA, 1985. ACM Press.
5. B. Sericola. Availability analysis of repairable computer systems and stationarity detection. *IEEE Transactions on Computers*, 48(11) :1166–1172, 1999.
6. W. J. Stewart. *Introduction to the numerical solution of Markov chains*. Princeton University Press, 1994.