Bounds on busy period for queues with breakdowns

Nadia Oukid

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Saad Dahleb
B.P. 270, Blida; Algeria.

e-mail: oukidnad@yahoo.fr

Plan de travail

- Introduction
- Méthodes de Comparaisons Stochastiques
- Description du modèle
- Notations
- Période d'activité
- Conclusion

Introduction

Dans les dernières décennies,les systèmes informatiques et téléphoniques, tendent à être de plus en plus complexes, intégrant des schémas de parallélisme, de non déterminisme, de communication et de synchronisation.

La conception de ces systèmes nécessite par sa complexité et ses implications économiques, des outils d'aide qui permettent l'évaluation ou l'analyse des performances du système.Cette évaluation consiste à déterminer de manière qualitative et quantitative le comportement du système étudié, en vue de vérifier sa correction, d'optimiser l'utilisation de ses ressources et d'augmenter sa fiabilité.

Dans cet exposé, en moyennant une approche par comparaison stochastique, nous obtenons des estimations par majoration et minoration pour la période d'activité.

Méthodes de Comparaisons Stochastiques

- Économie
- Finances
- Recherche Opérationnelle
- Statistique décisionnelle

Elles permettent en effet, d'obtenir des estimations et de mettre en évidence des propriétés qualitatives lorsqu'on est confronté à des variables aléatoires ou des processus stochastiques :

- dont l'évolution probabiliste n'est pas suffisamment spécifiée,
- dont l'étude analytique s'avère trop complexe,
- qui restent dans le cadre des théories existantes mais dont les caractéristiques sont trop complexe pour un usage pratique.

Notations

$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$, $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ suites de V.A.I. représentant respectivement, les durées d'inter-arrivées, durées de service, durées d'inter-rappels d'une même source secondaire.

ξ , τ, η les variables aléatoires stationnaires de distributions respectives $A(.)$, $B(.)$, $J(.)$; les *kiéme* moments sont respectivement a_k, b_k, j_k , $(k = 1, 2, ...)$.

$\widehat{\xi}, \widehat{\tau}, \widehat{\eta}$ les durées résiduelles correspondantes, de distributions respectives $\widehat{A}(.), \widehat{B}(.), \widehat{J}(.)$; et de *kiéme* moments $\widehat{a}_k, \widehat{b}_k, \widehat{j}_k$ respectivement.

$D_0(x)$ la distribution de probabilité d'une panne passive .
$D_1(x)$ la distribution de probabilité d'une panne active.

ψ_0, ψ_1 les durées de pannes correspondantes, et par α_0, α_1 les durées de réparations correspondantes de distributions $R_0(x), R_1(x)$.

Période d'activité.

Dans un système classique , la période d'inactivité du serveur coïncide avec celle du système; alors que dans un système avec rappels, la période d'activité du système contient un certain nombre de périodes d'inactivité du serveur. Ce fait complique énormément l'étude de la période d'activité et explique l'inadéquation des méthodes analytiques classique.

Dans le cas d'un système non fiable, la période d'activité peut débuter soit par l'arrivée d'un appel primaire (event A), soit par une panne qui se produit (event B).

Première borne

On a $P(A) = P_a = P(\psi_0 > \widehat{\xi}) = \gamma$, $\qquad P(B) = P_b = P(\widehat{\xi} > \psi_0) = \delta$
Soit β la durée de service avant la panne + la durée de réparation qui s'en suit, de distribution $G(.)$.
Et soit

$$E(\beta) = \beta_1 \qquad E(\alpha_0) = \alpha_{01}$$

$$E(l) \geq \begin{cases} \beta_1 & \text{avec une probabilité } \gamma, \\ \alpha_{01} & \text{avec une probabilité } \delta. \end{cases} \tag{1}$$

En prenant les espérances mathématiques nous obtenons une borne inférieure pour la période d'activité.

$$E(L) \geq \gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01} \tag{2}$$

Période d'inactivité

L'estimation de la période d'activité peut être obtenue par celle de la période d'inactivité et vice versa.

Théoreme 1. *(i)*

$$E(I) \geq \frac{1-P}{P}\{\gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01}\} \tag{3}$$

Où $P = lim_{t\to\infty} P$ $\{$*le système est non vide à l'instant* t $\}$

(ii) Si A *et* D_0 *sont NBU, alors*

$$I \leq_{st} min(\xi, \psi_0) \tag{4}$$

Seconde borne

Théoreme 2. *Si la distribution d'arrivées A est NBU (NWU), alors*

$$E(L) \geq (\leq) \frac{\gamma\beta_1}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - < H_A, R_0 >} \tag{5}$$

Où $< F, G > = \int_0^\infty F(x) dG(x)$ *et* $H_A(t) = E\{v(t)\} = \sum A^{*n}(t)$ *est la fonction de renouvellement de distribution fondamentale* $A(.)$ *associé au processus d'arrivées* $\{v(t), t \geq 0\}$.

Corollaire 1. *(i) Si A est NBUE, alors*

$$E(L) \geq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01}} \tag{6}$$

(ii) Si A est NWUE, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1 - \lambda^2\sigma^2} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01} - \lambda^2\sigma^2} \tag{7}$$

Où $\sigma^2 = var(\xi)$.

Théoreme 3. *Considérons un système $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable*

(i) Si A est NWU, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma[\beta_1 + \widehat{a}_1 + \widehat{j}_1 < H_A, G >]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \widehat{a}_1 + \widehat{j}_1 < H_A, R_0 >]}{1 - < H_A, R_0 >} \tag{8}$$

(ii) Si A est NBU, $\widehat{A}$ et $\widehat{J}$ sont IFRA, alors

$$E(L) \geq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum(\beta_1)]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum(\alpha_{01})]}{1 - < H_A, R_0 >} \tag{9}$$

où

$$\sum(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(v(x) = k)}{\widehat{a}_1^{-1} + k\widehat{j}_1^{-1}}$$

(iii) Si A est NWU, $\widehat{A}$ et $\widehat{J}$ sont DFRA, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum(\beta_1)]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum(\alpha_{01})]}{1 - < H_A, R_0 >} \tag{10}$$

Conclusion

Cette étude met en évidence l'intérêt et les applications des méthodes de comparaisons stochastiques pour l'analyse de files d'attente avec rappels et lorsque le serveur sujet à des pannes aléatoires.

La première borne est valable aussi bien pour le système classique $GI/GI/1$ que pour le système avec rappels . De plus , la durée moyenne de completion $E(\beta)$ peut être évaluée explicitement dans certains cas particuliers.

Les résultats obtenus dans cet exposé sont une généralisation de ceux démontrés par Stoyan (1983) dans le cas particulier d'un modèle classique et serveur fiable.

References

[1] A. Aissani and J.R. Artalejo, *On the single server retrial queue subject to breakdowns*, Queueing systems **30** (1998), 309–321.

[2] G.I. Falin and J.G.C. Tempeton, *Retrial queues*, Chapman and Hall, 1997.

[3] Jinhua Cao Jinting Wang and Quanlin Li, *Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs*, Queueing Systems **38** (2001), 363 – 380.

[4] Z. Khalil and B. Dimitrov, *The service time properties of an unreliable server characterize the exponential distribution*, Advance in Applied Probability **26** (1994), no. 1, 172– 182.

[5] N. Mikou, O. Idrissi-Kacimi, and S. Saadi, *Two processes interacting only during breakdown: the case where the load is not lost*, Queueing Systems **19** (1995), no. 3, 301– 317.

[6] D. Stoyan, *Comparison methods for queues and other stochastic models*, Wiley, New York, 1983.

[7] B. Vinod, *Unreliable queueing system*, Comput. Ops. Res. **12** (1985), no. 3, 323– 340.

Merci pour votre attention