Différentes notions de monotonies utilisées pour la modélisation stochastiques

Imène KADI
imene.kadi@prism.uvsq.fr

9^{ième} Atelier d'Évaluation de Performances

Plan

Introduction

- Plusieurs types de monotonies
  - Monotonie stochastique (basée sur les ordres stochastiques : Stoyan et Massey)
  - Monotonie utilisée pour la simulation parfaite .
    - Monotonie réalisable (Fill)
    - Monotonie événementielle (Yao et Glasserman).
- Dépend de la relation d'ordre considérée sur l'espace d'états.

La monotonie stochastique

Définition (L'ordre stochastique fort $\preceq_{st}$)

Soient T et V deux mesures de probailité,et Γ un ensemble croissant défini sur $\mathcal{X}$

$$T \preceq_{st} V \Leftrightarrow \sum_{x \in \Gamma} P(T = x) \leq \sum_{x \in \Gamma} P(V = x), \quad \forall \Gamma$$

Définition (L'ensemble croissant)

$$Si\ x \in \Gamma \implies \forall y \mid y \succeq x, \quad y \in \ \Gamma$$

Exemple

- Soit$(\mathcal{X},\preceq)$ un espace partiellement ordonné, $\mathcal{X}=\{a,b,c,d\}$.
- $a\preceq b\preceq d$, et $a\preceq c\preceq d$,
- Ensembles croissants :Γ_1=$\{$a,b,c,d$\}$, Γ_2=$\{$b,c,d$\}$, Γ_3=$\{$b,d$\}$, Γ_4=$\{$c,d$\}$, Γ_5=$\{$d$\}$.
- $V1$=(0.4,0.2,0.1,0.3)
  $V2$=(0.2,0.1,0.3,0.4)

$$V1 \preceq_{st} V2$$

On a :

- Pour Γ_1=$\{$a,b,c,d$\}$:
  $0.4+0.2+0.1+0.3\leq 0.2+0.1+0.3+0.4$
- Pour Γ_2=$\{$b,c,d$\}$: $0.2+0.1+0.3\leq 0.1+0.3+0.4$
- Pour Γ_3=$\{$b,d$\}$: $0.2+0.3\leq 0.1+0.4$
- Pour Γ_4=$\{$c,d$\}$: $0.1+0.3\leq 0.3+0.4$
- Pour Γ_5=$\{$d$\}$:$0.3\leq 0.4$

Différentes notions de monotonie : la monotonie stochastique

Définition

Soit P une matrice de transition sur un espace d'états partiellement ordonné $(\mathcal{X}, \preceq)$. On dit que P est stochastiquement monotone si et seulement si :

$$P(x,.) \ \preceq_{st} \ P(y,.), \ \ \forall \ x \ \preceq \ y$$

On note par $P(x,.)$ la ligne x de la matrice.

Monotonoie Stochastiques et ordres partiels

Propriété

Si $\mathbf{P}$ *est* $\leqslant_{st}$*-monotone sur un ordre total défini sur* $\mathcal{X}$ *, cela n'implique pas qu'elle est* $\preceq_{st}$ *-monotone sur un ordre partiel défini sur* $\mathcal{X}$*.*

- **C**ontre exemple : Soit $(\mathcal{X}, \leqslant)$ un espace d'états totalement ordonné. $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$ et $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{P}$ est $\leqslant_{st}$-monotone.

Monotonie stochastiques et ordres partiels

- On considère un ordre partiel $\preceq$ sur l'espace $\mathcal{X}$ tel que :
  - $a \preceq b \preceq d$, et $a \preceq c \preceq d$,
  - Ensembles croissants :Γ_1={a,b,c,d}, Γ_2={b,c,d}, Γ_3={b,d}, Γ_4={c,d}, Γ_5={d}.
  - La matrice **P** n'est pas $\preceq_{st}$-monotone.
  - Pour l'ensemble Γ_3={b, d}
    - 1/6 +1/3 >1/3

La monotonie réalisable

- Plusieurs types de monotonie ont été définies pour la simulation parfaite.

Définition

Une matrice de transition P est décrite par une fonction de transition Φ, qui est définie par :

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, U_{n+1})$$

Où X_n est le n^{ieme} état observé, et U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur [0,1].

Définition (La monotonie réalisable)

Soit Φ une fonction de transition définie sur une matrice de transition P, dans un espace d'états partiellement ordonné $(\mathcal{X}, \preceq)$. On dit que P est réalisable monotone si et seulement si : il existe Φ tel que,

$$\Phi(x, u) \preceq \Phi(y, u), \ \forall \ (x, y) \ | x \preceq y$$

- Φ utilisée dans ce travail = l'inverse de la distribution (Fill,2000).

La monotonie événementielle

Définition (Un événement)

Un événement e est une application définie sur $\mathcal{X}$ qui associe à chaque état $x \in \mathcal{X}$ un nouvel état $\Phi(x, e)$.

Définition (Les événements monotones)

Un événement e est dit monotone, si il préserve l'ordre partiel $\preceq$ sur $\mathcal{X}$:

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \;\; x \preceq y \rightarrow \Phi(x, e) \preceq \Phi(y, e)$$

Le système est dit monotone, si tous ses événements sont monotones.

Monotonie événementielle et ordres partiels

Propriété

Sur un espace d'état $\mathcal{X}$:
monotonie événementielle avec l'ordre total $\leqslant_{st}$
$\not\Rightarrow$ *monotonie événementielle avec l'ordre partiel $\preceq_{st}$.*

- **C**ontre exemple :
  - $P3$ matrice définie sur l'espace d'état $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$=\{a, b, c, d\}.
  - Trois événements avec le probabilités suivantes : $p_{e_1} = 1/2,\ p_{e_2} = 1/3,\ p_{e_3} = 1/6$.

-

$$\mathbf{P}3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

	e_1	e_2	e_3
a	a	c	b
b	a	d	b
c	a	d	c
d	b	d	c

- Ordre total $\leqslant$:$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.
  - $P3$ est monotone par événement.
- Ordre partiel $\preceq$: $a \preceq b \preceq d$ et $a \preceq c \preceq d$.
  - $P3$ n'est pas monotone par événement
  - Pour l'événement e_1 ; $\Phi(c, e_3) = c$ est incomparable avec $\Phi(a, e_3) = b$.

Relations entre les différentes types de monotonies

Théorème

La monotonie événementielle $\rightarrow$ La monotonie stochastique.

Preuve

De la monotonie événementielle on a :

$$x \preceq y \rightarrow \Phi(x, e) \preceq \Phi(y, e)$$

Pour chaque x : $\Phi(x, e) = z$, $\Phi(y, e) = z'$ tel que $z' \succeq z$, cela signifie que $P[x, z] = \sum p_e$.

Donc pour chaque ensemble croissant Γ,

$$p_e \ \in \ \mathbf{P}[x, *] \implies p_e \ \in \ \mathbf{P}[y, *]$$

d'ou la monotonoie stochastique.

- La réciproque de cette impliquation n'est pas vrai.
- **C**ontre exemple : Soit $(\mathcal{X}, \preceq)$ un espace d'états totalement ordonné. $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$ et $a \preceq b \preceq c \preceq d$; On considère trois événements avec les probabilités suivantes
$p_{e_1} = 1/6, \; p_{e_2} = 1/3, \; p_{e_3} = 1/2.$

$$\mathbf{P}1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Les ensembles croissants : Γ_a={a,b,c,d}, Γ_b={b,c,d}, Γ_c={c,d}, Γ_d={d},
- P1 est $\preceq_{st}$ monotone.
- P1 n'est pas monotone par événement. Pour $p_{e_1} = 1/6$, $\Phi(c, e_1) = c \;\succeq\; \Phi(d, e_1) = b$.

Théorème

La monotonie événementielle $\rightarrow$ *La monotonie réalisable.*

preuve

- Construire la fonction de transition $\Phi_r(x,u)$ a partir de la fonction de transition par événement$\Phi(x,e)$.
  - if $u \in\ [0, p_{e_1}] : \Phi_r(x,u) = \Phi(x,e_1)$
  - if $u \in\ ]p_{e_1}, p_{e_1} + p_{e_2}] : \Phi_r(x,u) = \Phi(x,e_2)$

    .

    .
  - if $u \in\ ]\sum_{j=1}^{i-1} p_{e_j}, \sum_{j=1}^{i} p_{e_j}] : \Phi_r(x,u) = \Phi(x,e_i)$

    .

    .
  - if $u \in\ ]\sum_{j=1}^{n-1} p_{e_j}, \sum_{j=1}^{n} p_{e_j}] : \Phi_r(x,u) = \Phi(x,e_n)$
- pour chaque intervalle $]\sum_{j=1}^{i-1} p_{e_j}, \sum_{j=1}^{i} p_{e_j}]$, la fonction de transition Φ_r est realisable monotone.

- La réciproque de cette impliquation n'est pas vrai si l'ensemble des événement est prédéfinis

Contre exemple :

- $(\mathcal{X}, \preceq)$ un espace d'états partiellement ordoné , $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$, $a \preceq b \preceq d$ and $a \preceq c \preceq d$;
- Trois événement, avec les probabilités suivantes : $p_{e_1} = 1/6, \; p_{e_2} = 1/3, \; p_{e_3} = 1/2$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- <table>
<tr><td></td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>a</td><td colspan="3">a</td><td colspan="2">b</td><td>d</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="3">a</td><td>b</td><td colspan="2">d</td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="3">a</td><td colspan="2">b</td><td>d</td></tr>
<tr><td>d</td><td colspan="2">b</td><td>c</td><td colspan="3">d</td></tr>
</table>

	e_1	e_2	e_3
a	a	b	d
b	a	d	d
c	a	b	d
d	b	d	c

- En considérent l'ensemble initial des événments
  - P est réalisable monotone ,
  - P n'est pas monotone par événement
- Si on change l'ensemble des événements on peut avoir la monotonie événmentielle

Théorème

La monotonie réalisable $\longrightarrow$ *La monotonie stochastique.*

- D'après Fill
  - Equivalence si l'espace est totalement ordonné.
  - La monotonie réalisable $\longrightarrow$ La monotonie stochastique. si l'espace est partiellement ordonné

A l'ordre partiel

- La monotonie stochastique $\nrightarrow$ La monotonie réalisable.
- **C**ontre exemple :

$$\mathbf{P}3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

<table>
<tr><th></th><th>1/6</th><th>1/6</th><th>1/6</th><th>1/6</th><th>1/6</th><th>1/6</th></tr>
<tr><td>a</td><td colspan="3">a</td><td>b</td><td colspan="2">c</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="3">a</td><td>b</td><td colspan="2">d</td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="3">a</td><td>c</td><td colspan="2">d</td></tr>
<tr><td>d</td><td>b</td><td colspan="3">c</td><td colspan="2">d</td></tr>
</table>

Conclusion

- Ordre total
  - Monotonie réalisable $\Longleftrightarrow$ monotonie stochastique.
  - Monotonie événementielle $\not\Leftrightarrow$ monotonie stochastique.
- Ordre partiel
  - Monotonie événementielle $\Longrightarrow$ Monotonie réalisable $\Longrightarrow$ Monotonie stochastique.