

Efficacité de méthodes de détection du régime stationnaire pour l'analyse de la disponibilité ponctuelle des grands modèles

Leonardo Brenner, Brigitte Plateau

{prénom.nom}@imag.fr

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, France
Projet MESCAL

Aussois, 1 Juin 2008



Plan

- 1 Objectifs
- 2 Disponibilité Ponctuelle
- 3 Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)
- 4 Comparaison des Méthodes
- 5 Conclusions

Objectifs

Tester l'efficacité de méthodes de détection du régime stationnaire pour le calcul de la disponibilité ponctuelle pour des grands modèles.

Efficacité ?

On teste l'efficacité par une comparaison expérimentale des méthodes par rapport à :

- Nombre d'itérations
- Précision des résultats

Disponibilité ponctuelle

La disponibilité ponctuelle est l'espérance de récompense dans la distribution transitoire à l'instant t .

$$PAV(t) = \sum_i \pi_t[i] r(i)$$

où :

$\pi_t[i]$ la probabilité du i -ème élément du vecteur de probabilité de la distribution transitoire à l'instant t ;

$r(i)$ la fonction de récompense pour l'état i .

Pour le calcul de la disponibilité ponctuelle, la fonction de récompense modélise la fonction indicatrice de l'ensemble d'états *UP*. La fonction indicatrice vaut 1 lorsque l'état i appartient à l'ensemble *UP* et 0 lorsque il appartient à l'ensemble *DOWN*.

Disponibilité Ponctuelle

La distribution transitoire de la chaîne de Markov à l'instant t peut être obtenue par l'équation :

$$\pi_t = \pi_0 e^{Qt}.$$

Par conséquent, on calcule $PAV(t)$ par :

$$PAV(t) = \pi_0 e^{Qt} \mathbb{1}_{UP}.$$

où :

- π_0 le vecteur de la distribution initial à l'instant t ;
- Q la matrice de taux de transition ;
- $\mathbb{1}_{UP}$ le vecteur de la fonction de récompense qui exprime la fonction indicatrice de l'ensemble d'états UP

Méthode d'uniformisation

Par la *méthode d'uniformisation*, on peut alors réécrire l'équation de la disponibilité ponctuelle par :

$$PAV(t) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} P^n \mathbb{1}_U$$

Matrice P

$$P = (Id + Q/(\lambda))$$

λ la plus grande valeur de la matrice Q .

Élévation de la Matrice P à la Puissance n

- La partie la plus coûteuse du calcul ;
- Faite par multiplications successives entre la matrice et un vecteur.

Multiplication à gauche

$$v_n = \begin{cases} v_0 = \pi_0 \\ v_n = v_{n-1}P \end{cases}$$

Multiplication à droite

$$w_n = \begin{cases} w_0 = \mathbb{1}_{UP} \\ w_n = P w_{n-1} \end{cases}$$

Détection du régime stationnaire

L'objectif des méthodes de détection du régime stationnaire est réduire le coût de calcul en arrêtant les multiplications matrice-vecteur lorsqu'on arrive en régime stationnaire.

On utilise le vecteur en régime stationnaire (obtenu à la N -ème itération) à la place des vecteurs qui suivent la N -ème itération pour calculer la disponibilité ponctuelle.

Méthodes de détection du régime stationnaire

- Convergence du vecteur w_n ;
- Contrôle de la suite du vecteur w_n .

Convergence du vecteur w_n

- Le régime stationnaire est détecté par la convergence du vecteur ;
- La convergence du vecteur est détectée par comparaison de 2 vecteurs successifs de l'itération selon différentes normes ;
- Le régime stationnaire est détecté lorsque la différence entre 2 vecteurs est plus petite que l'erreur maximum acceptée.

Différentes normes

- *Test de convergence absolue individuel :*

$$\max_{i \in 1, \dots, S} (|w_n[i] - w_{n-1}[i]|) < \varepsilon$$

- *Test de convergence absolue accumulée :*

$$\| w_n[i] - w_{n-1}[i] \|_1 < \varepsilon$$

- *Test de convergence relative individuel :*

$$\max_{i \in 1, \dots, S} \left(\frac{|w_n[i] - w_{n-1}[i]|}{|w_n[i]|} \right) < \varepsilon$$

ε est l'erreur maximum acceptée.

Contrôle de la suite de vecteur w_n

- Proposé par Sericola en 1999 ;
- Détection par la comparaison de la différence entre le minimum (m_n) et le maximum (M_n) des composants du vecteur w_n .

Propriétés des m_n et M_n

- m_n toujours croissantes ;
- M_n toujours décroissantes ;
- m_n et M_n convergent vers la disponibilité en régime stationnaire.

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Modélisation de systèmes complexes par la décomposition en sous-systèmes ;
- Sous-systèmes indépendants qui interagissent occasionnellement ;
- Équivalence aux Chaînes de Markov.

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Modélisation de systèmes complexes par la décomposition en sous-systèmes ;
- Sous-systèmes indépendants qui interagissent occasionnellement ;
- Équivalence aux Chaînes de Markov.

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Modélisation de systèmes complexes par la décomposition en sous-systèmes ;
- Sous-systèmes indépendants qui interagissent occasionnellement ;
- Équivalence aux Chaînes de Markov.

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

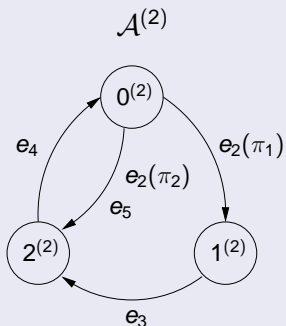
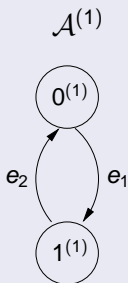
Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément
- L'interaction entre les automates :
 - Événements synchronisants
 - Taux et/ou probabilités fonctionnels

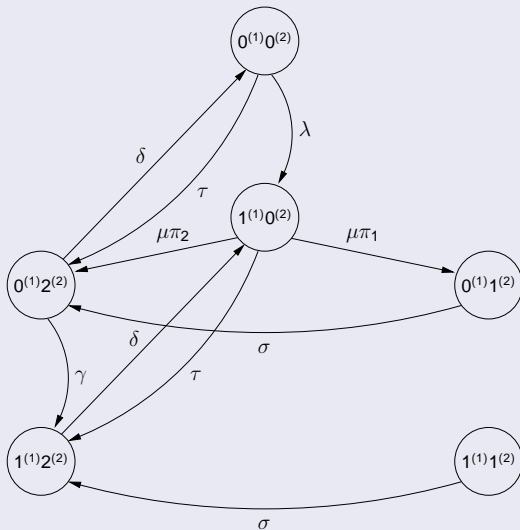
SAN (Exemple)



Type	Event	Rate
loc	e_1	f
syn	e_2	μ
loc	e_3	σ
loc	e_4	δ
loc	e_5	τ

$$f = [(st \mathcal{A}^{(2)} == 0^{(2)}) * \lambda] + [(st \mathcal{A}^{(2)} == 2^{(2)}) * \gamma]$$

Chaîne de Markov Équivalente



Comparaison des méthodes de détection du régime stationnaire

- 6 différents modèles ;
 - FAS - Premier serveur disponible ;
 - MSA - Disponibilité d'un système multi-processeur ;
 - CFR - Grappe de processeurs reconfigurable ;
 - RWP - Patron de mobilité aléatoire ;
 - DDS - Base de données distribuée ;
 - Workstation - Grappe de station de travail.
- Variation de la taille de modèles ;
- Variation de l'ensemble d'états *UP*.

Critères de comparaison

- Nombre d'itérations ;
- Précision des résultats.

Méthodes comparées

CAI Méthode de convergence de vecteur avec le test de *Convergence Absolue Individuel* du vecteur ;

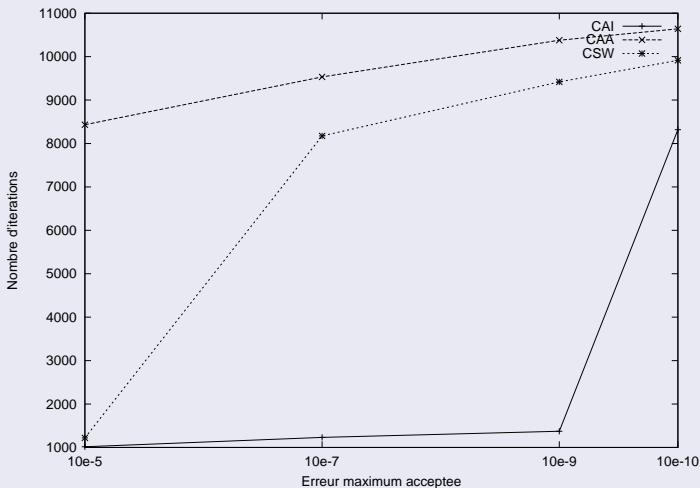
AAC Méthode de convergence de vecteur avec le test de *Convergence Absolue Accumulée* du vecteur ;

CSW Méthode de *Contrôle de la Suite* du vecteur w_n .

Nombre d'itérations

- Meilleure résultat de la méthode CAI pour tous les modèles ;

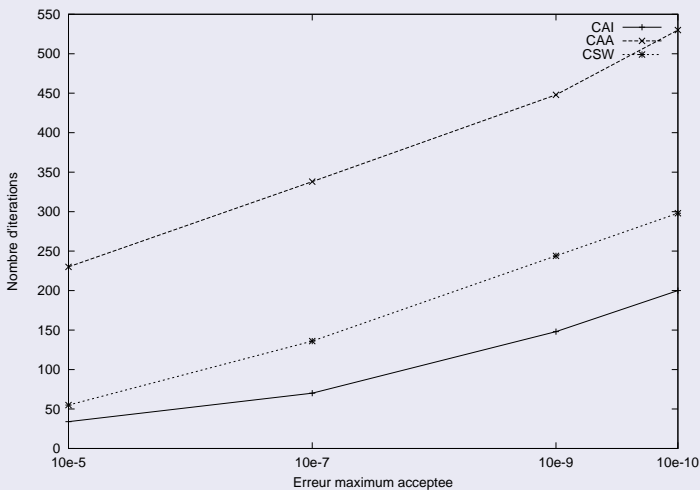
Modèle Workstation - 512 serveurs - 4,210,704 états



Nombre d'itérations

- Meilleure résultat de la méthode CAI pour tous les modèles ;
- Meilleure résultat de la méthode CSW pour les grands modèles par rapport à la méthode CAA ;

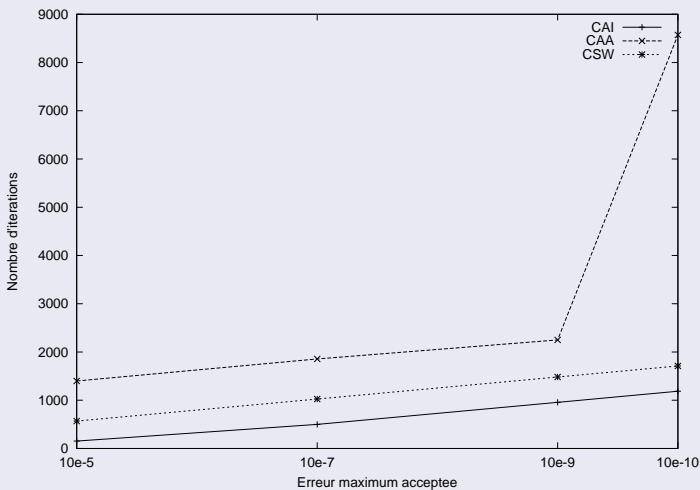
Modèle FAS - 1.048.576 états



Nombre d'itérations

- Meilleure résultat de la méthode CAI pour tous les modèles ;
- Meilleure résultat de la méthode CSW pour les grands modèles par rapport à la méthode CAA ;
 - Différence assez importante pour certains modèles ;

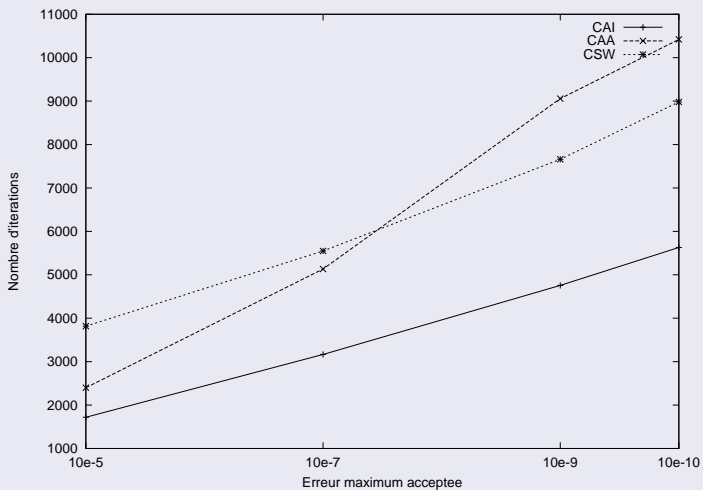
Modèle DDS - 3.515.625 états



Nombre d'itérations

- Meilleure résultat de la méthode CAI pour tous les modèles ;
- Meilleure résultat de la méthode CSW pour les grands modèles par rapport à la méthode CAA ;
 - Différence assez importante pour certains modèles ;
 - Exception pour le modèle CFR (grande erreur maximum acceptée) ;

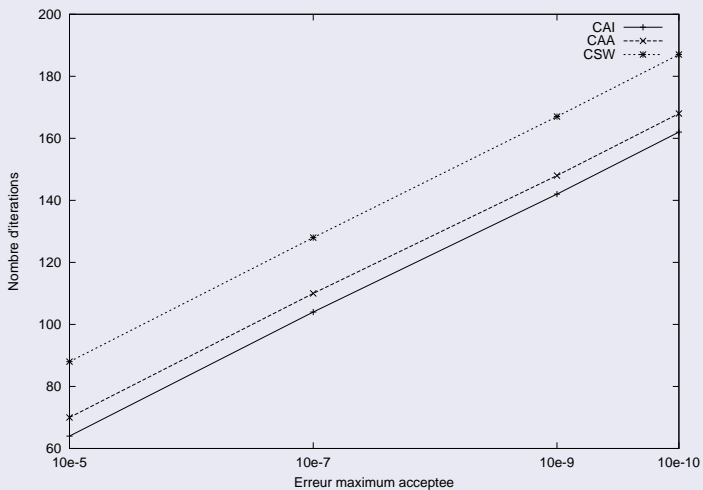
Modèle CFR - 14.348.907 états



Nombre d'itérations

- Meilleure résultat de la méthode CAI pour tous les modèles ;
- Meilleure résultat de la méthode CSW pour les grands modèles par rapport à la méthode CAA ;
 - Différence assez importante pour certains modèles ;
 - Exception pour le modèle CFR (petite précision) ;
- Meilleure résultat de la méthode CAA pour les petits modèles par rapport à la méthode CSW.

Modèle MSA - 514 états



Précision des Résultats

On calcule la précision des résultats par la différence de la valeur de la disponibilité ponctuelle calculé par chaque méthode et la valeur obtenue par la méthode CSW avec une erreur maximum acceptée de $1e^{-10}$.

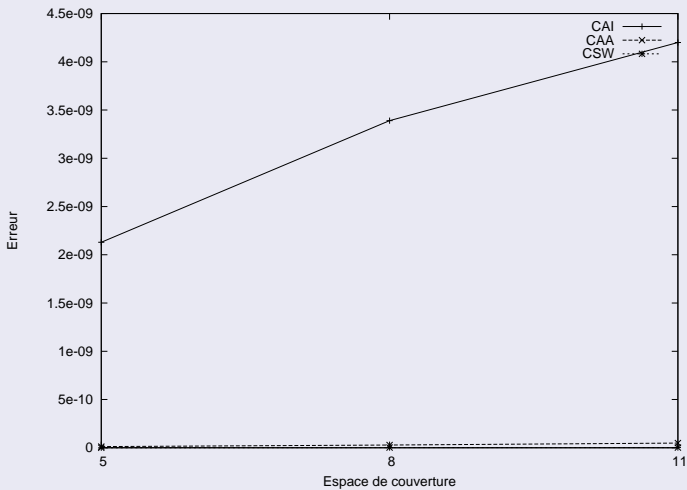
Fausse détection de convergence

Le problème de précision des résultats est causé par une détection prématurée du régime stationnaire (fausse détection de convergence).

Précision des Résultats

- Problème de fausse détection de convergence est observé dans la méthode CAI pour les modèles FAS, CFR, RWP et Workstation.

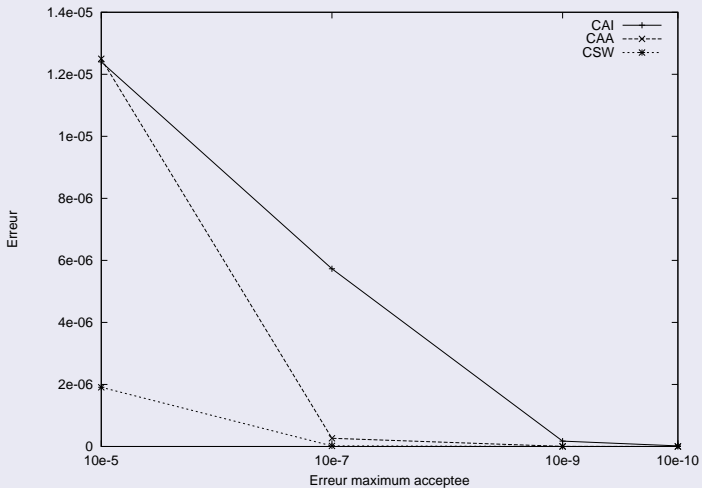
Modèle RWP - Erreur maximum acceptée égale à $1e-9$



Précision des Résultats

- Problème de fausse détection de convergence est observé dans la méthode CAI pour les modèles FAS, CFR, RWP et Workstation ;
- Problème de fausse détection de convergence est observé dans la méthode CAA uniquement pour le modèle CFR ;

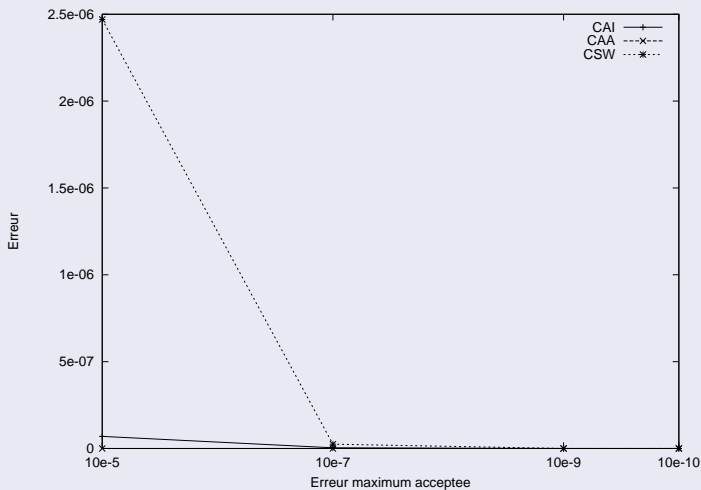
Modèle CFR - 243 états



Précision des Résultats

- Problème de fausse détection de convergence est observé dans la méthode CAI pour les modèles FAS, CFR, RWP et Workstation ;
- Problème de fausse détection de convergence est observé dans la méthode CAA uniquement pour le modèle CFR ;
- La méthode CSW présente des résultats moins bon pour certains modèles et pour une grande erreur maximum acceptée ($1e^{-5}$).

Workstation - 17.424 états



Conclusions

- La bonne performance de la méthode CAI sur le nombre d'itération est compromise par les problèmes de fausse convergence ;
- La méthode CAA présente moins de problèmes de fausse convergence, de plus le nombre d'itérations est très mauvais pour la plus grande partie des modèles testés ;
- La méthode CSW permet un calcul fiable de la disponibilité ponctuelle pour un surcoût entre 20% et 500%.

Questions ?